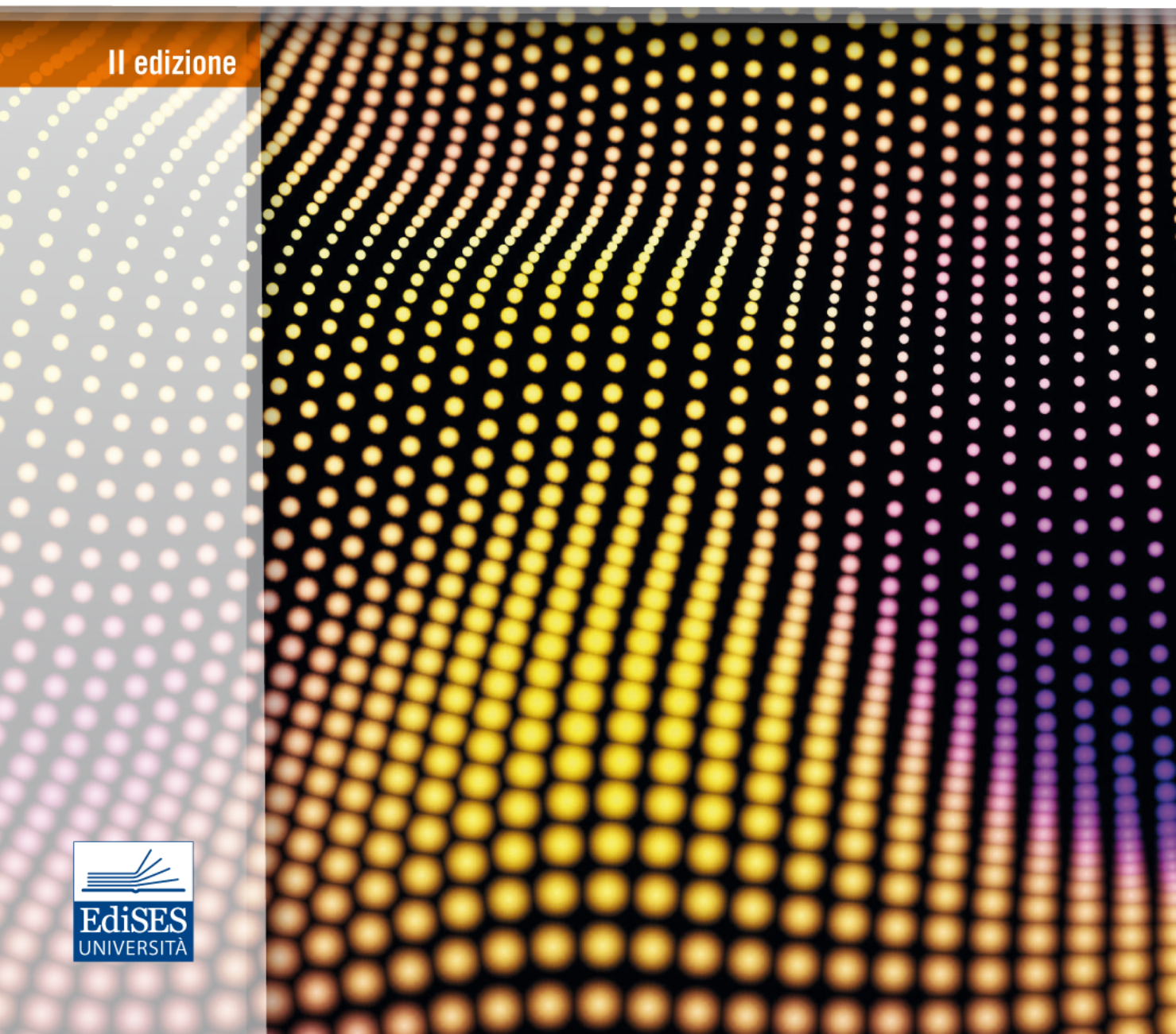
N. Fusco • C. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

II edizione



EdiSES UNIVERSITÀ

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

II Edizione

Volume 2

Nicola Fusco
Carlo Sbordone

EdiSES
UNIVERSITÀ

Nicola Fusco – Carlo Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base - Elementi di geometria - VOLUME 2 - II Edizione

Estratto da
Matematica volumi 1 e 2 - N. Fusco • C. Sbordone • M. Tassalini
Dimensione matematica volume 2 - N. Fusco • C. Sbordone • M. Tassalini
Copyright © 2019, EdiSES Università s.r.l. - Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2023 2022 2021 2020 2019

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.
L'Editore

Nicola Fusco
Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"

Carlo Sbordone
Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"

Stampato presso
Tipografia Sograte S.r.l.
Zona Ind. Regnano – Città di Castello (PG)

per conto della
EdiSES Università s.r.l. - Piazza Dante, 89 - Napoli

ISBN 9788833190648

www.edisesuniversita.it
info@edisesuniversita.it

Prefazione

Il presente corso di **Fondamenti di matematica per la formazione di base** è rivolto ai futuri insegnanti delle scuole elementari e dell'infanzia e si occupa (Vol. 1) di ***numeri e operazioni*** e (Vol. 2) di ***elementi di geometria.***

L'esposizione è concisa ed essenziale e contiene spesso spunti di logica senza troppo soffermarsi in descrizioni discorsive. Si fa uso di simboli per rendere sintetiche e chiare le esposizioni di matematica, attraverso un'adeguata gradualità. Condividendo il punto di vista che i futuri insegnanti, nel corso degli studi universitari, debbano accedere ad un livello e ad una quantità di conoscenze matematiche che superino quelli relativi a quanto essi stessi dovranno poi presentare in classe, vengono offerti diversi argomenti. Viene praticato un metodo espositivo motivato dalla convinzione degli autori che ogni *concetto matematico*, anche a livello elementare, richieda una definizione precisa, ma anche l'accenno a qualche aspetto intuitivo, la motivazione della sua importanza e un po' di collocazione storica.

Inoltre, ogni *metodo di calcolo* richiede la consapevolezza di quando sia opportuno applicarlo.

Significativo è il ricorso alla coerenza. Ad esempio, nella presentazione delle operazioni aritmetiche dal caso dei numeri interi a quello delle frazioni, pur evidenziando le differenze nel passaggio dai diversi insiemi, è fondamentale mostrare che esse corrispondono allo stesso concetto.

Nel Volume 1, dopo un capitolo di teoria degli insiemi e uno di logica per la matematica, vengono presentati gli insiemi numerici, ponendo l'accento sulla loro collocazione sulla retta, e il metodo delle coordinate nel piano. Si studiano successivamente le funzioni elementari e le equazioni di primo e secondo grado. In appendice sono forniti cenni di calcolo combinatorio e cenni di probabilità e statistica

Nel Volume 2, vengono presentati i concetti primitivi della geometria euclidea, triangoli e poligoni, rette perpendicolari e parallele, relazioni tra elementi dei poligoni, trapezi, parallelogrammi, e le trasformazioni isometriche nel piano. Un capitolo è dedicato alla circonferenza e al cerchio, e uno ai poligoni inscritti e circoscritti. I teoremi di Euclide e Pitagora rientrano nel capitolo sull'equivalenza di figure piane.

Viene poi ripreso lo studio delle curve nel piano cartesiano e si considerano problemi descritti da equazioni di primo e secondo grado e da sistemi di primo grado.

Una posizione particolare occupa lo studio dei rapporti fra grandezze omogenee con particolare attenzione al teorema di Talete. Nei capitoli conclusivi vengono trattate similitudini e omotetie e presentate varie applicazioni dell'algebra alla geometria. In appendice sono presenti cenni sulle equazioni algebriche di secondo grado o ad esse riconducibili.

La presente nuova edizione contiene alcuni capitoli di geometria solida, non considerati nella precedente.

Napoli 18 settembre 2019

Gli Autori

Indice

Parte I

15 Concetti primitivi della geometria

1. Punto, retta, piano 282 (2)
2. Proprietà della retta. Semiretta. Segmento 284 (4)
3. Proprietà del piano. Semipiani. Angoli 285 (5)
4. La congruenza fra segmenti 286 (6)
5. La congruenza fra angoli 289 (9)

16 Triangoli e poligoni

1. Spezzate e poligoni 294 (14)
2. Triangoli 295 (15)
3. Congruenze di triangoli 297 (17)
4. Primo criterio di congruenza dei triangoli 297 (17)
5. Secondo criterio di congruenza dei triangoli 299 (19)
6. Terzo criterio di congruenza dei triangoli 300 (20)
7. Bisettrice di un angolo 301 (21)
8. Punto medio di un segmento 302 (22)
9. Teorema dell'angolo esterno 302 (22)

17 Rette perpendicolari e rette parallele

1. Rette perpendicolari 305 (25)
2. Alcune definizioni: altezza, mediana, bisettrice di un triangolo 307 (27)
3. Rette parallele 308 (28)
4. Distanza tra due punti e tra un punto e una retta 311 (31)
5. Distanza di due rette parallele 312 (32)
6. Trasversali di un fascio di rette parallele 313 (33)

18 Relazione tra elementi dei poligoni. Luoghi geometrici

1. Somma degli angoli di un triangolo 316 (36)
2. Somma degli angoli di un poligono 317 (37)
3. Disuguaglianze tra elementi di un poligono 318 (38)
4. Luoghi geometrici 319 (39)

19 Trasformazioni isometriche nel piano

1. Trasformazioni geometriche 321 (41)
2. Isometrie 321 (41)
3. Le principali isometrie 324 (44)
4. La simmetria rispetto ad un punto (o simmetria centrale) 325 (45)
5. La simmetria rispetto ad una retta (o simmetria assiale) 326 (46)
6. Traslazioni 327 (47)
7. Rotazioni 328 (48)
8. Composizione (o prodotto) di isometrie 329 (49)
9. Gruppi di trasformazioni isometriche 331 (51)

20 Quadrilateri particolari: trapezi e parallelogrammi

1. Trapezi 335 (55)
2. Parallelogrammi 337 (57)
3. Parallelogrammi particolari 338 (58)

21 La circonferenza

1. Generalità sulla circonferenza e sul cerchio 342 (62)
2. Circonferenze congruenti 344 (64)
3. Confronto e somma di archi 345 (65)
4. Proprietà delle circonferenze 346 (66)
5. Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza 350 (70)
6. Posizioni reciproche di due circonferenze complanari 352 (72)
7. Angoli alla circonferenza 354 (74)

22 Poligoni inscritti e circoscritti. Poligoni regolari

1. Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza 359 (79)
2. Punti notevoli di un triangolo 359 (79)
3. Quadrilateri inscritti e circoscritti ad una circonferenza 362 (82)
4. Poligoni regolari 363 (83)

23 Equivalenza di figure poligonali

1. Definizioni e prime proprietà 368 (88)
2. La equiscomponibilità come relazione di equivalenza 369 (89)
3. Equivalenze di parallelogrammi e triangoli 370 (90)
4. Teoremi di Euclide e di Pitagora 373 (93)
5. Trasformazioni di poligoni 375 (95)

Parte II

9 Curve nel piano cartesiano

1. Introduzione 178 (98)
2. L'equazione della circonferenza 178 (98)
3. Problemi sulla circonferenza 182 (102)
4. Traslazione degli assi coordinati 187 (107)
5. L'equazione della parabola 189 (109)
6. Problemi sulla parabola 194 (114)
7. L'equazione dell'iperbole equilatera 196 (116)

10 Problemi di primo e secondo grado

1. Introduzione 198 (118)
2. Problemi descritti da equazioni di secondo grado in una incognita 198 (118)
3. Problemi descritti da sistemi di equazioni di primo o secondo grado in due o più incognite 200 (120)
4. Problemi descritti da sistemi di equazioni o disequazioni di primo grado 202 (122)

11 Rapporti fra grandezze. Teorema di Talete

1. Classi di grandezze omogenee 207 (127)
2. Misura delle grandezze 209 (129)
3. Rapporto fra due grandezze 210 (130)
4. Grandezze proporzionali 212 (132)
5. Teorema di Talete 214 (134)
6. Teoremi sulle bisettrici di un triangolo 217 (137)

12 Similitudini e omotetie

1. Triangoli simili 220 (140)
2. Applicazioni della similitudine dei triangoli 223 (143)
3. Corde e secanti di una circonferenza 224 (144)
4. Poligoni simili 225 (145)
5. Relazioni tra perimetri di poligoni simili 227 (147)
6. Relazioni fra poligoni simili e quadrati di lati omologhi 228 (148)
7. Sezione aurea di un segmento 229 (149)
8. Risoluzione di problemi 231 (151)
9. La similitudine come trasformazione geometrica nel piano 232 (152)
10. Omotetie 235 (155)

13 Area dei poligoni. Applicazioni dell'algebra alla geometria

1. Area di un poligono 238 (158)
2. Area del rettangolo e di altri particolari poligoni 238 (158)
3. Formulazione algebrica dei teoremi di Pitagora e di Euclide. Prime applicazioni 240 (160)
4. Ulteriori applicazioni dell'algebra alla geometria 244 (164)
5. Costruzione geometrica di qualche espressione algebrica 248 (168)
6. Esempi di risoluzione di alcuni problemi geometrici 248 (168)

15 Misura della circonferenza e del cerchio

1. Gli archi di circonferenza come classi di grandezze 288 (176)
2. Lunghezza di una circonferenza 288 (176)
3. Lunghezza degli archi. Radiante 291 (179)
4. Area del cerchio 292 (180)
5. Area di un settore circolare 293 (181)

16 Rette e piani nello spazio

1. Generalità 296 (184)
2. Intersezione di due piani 297 (185)
3. Rette e piano perpendicolari 298 (186)
4. Rette parallele nello spazio 300 (188)
5. Proiezioni su un piano. Angolo di una retta con un piano 302 (190)
6. Rette e piano paralleli 303 (191)
7. Piani paralleli 304 (192)

17 Diedri. Angoloidi

1. Diedri 307 (195)
2. La congruenza fra diedri 307 (195)
3. Sezione normale di un diedro 308 (196)
4. Piani perpendicolari 310 (198)
5. Angoloidi 310 (198)

18 Trasformazioni isometriche nello spazio

1. Isometrie 313 (201)
2. Le principali isometrie 313 (201)
3. La simmetria rispetto ad un punto (o simmetria centrale) 315 (203)
4. La simmetria rispetto ad una retta (o simmetria assiale) 315 (203)
5. La simmetria rispetto ad un piano (o simmetria planare) 315 (203)
6. La traslazione nello spazio 316 (204)
7. La rotazione intorno ad una retta 316 (204)
8. Gruppi di isometrie 317 (205)

19 Poliedri. prismi, piramidi. Misura delle aree

1. Poliedri 319 (207)
2. Prismi 319 (207)
3. Parallelepipedi 321 (209)
4. Piramidi 323 (211)
5. Poliedri regolari 325 (213)
6. Simmetrie in particolari solidi geometrici 327 (215)
7. Aree della superficie dei poliedri 328 (216)

20 Solidi di rotazione. Misura delle aree

1. Superfici e solidi di rotazione 331 (219)
2. Cilindro. Cono 331 (219)
3. Sfera 334 (222)
4. Posizioni relativa di rette, piani e superficie sferiche 335 (223)
5. Figure sferiche 335 (223)

21 Volume dei solidi

1. Concetto di volume 338 (226)
2. Volume del parallelepipedo rettangolo 338 (226)
3. Volume del prisma 339 (227)
4. Volume della piramide 340 (228)
5. Volume del cilindro e del cono 342 (230)
6. Volume del tronco di piramide e del tronco di cono 342 (230)
7. Volume della sfera 343 (231)
8. Area della superficie sferica 344 (232)
9. Misure relative alle figure sferiche 345 (233)

Parte III

2 Richiami di aritmetica

1. Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione nell'insieme N dei numeri naturali 22 (236)

2. Sottrazione e divisione fra numeri naturali 23 (237)

3. Confronto fra numeri naturali 24 (238)

4. Il teorema della divisione con resto. Numeri primi 25 (239)

5. Massimo comun divisore e minimo comun multiplo 28 (242)

6. Potenze di numeri naturali 32 (246)

7. Sistemi di numerazione 34 (248)

3 Equazioni di secondo grado

1. Introduzione alle equazioni di secondo grado 54 (254)

2. Risoluzione delle equazioni di secondo grado incomplete 55 (255)

3. Risoluzione delle equazioni di secondo grado complete 57 (257)

4. La formula risolutiva ridotta 61 (261)

5. Relazioni tra le radici ed i coefficienti di un'equazione di secondo grado. Conseguenze 62 (262)

6. Regola dei segni di Cartesio 65 (265)

7. Scomposizione di un trinomio di secondo grado 67 (267)

8. Equazioni frazionarie 68 (268)

9. Alcuni problemi sulle equazioni di secondo grado 69 (269)

4 Equazioni riducibili al secondo grado. Equazioni irrazionali

Premessa: equazioni abbassabili di grado 75 (275)

1. Le equazioni binomie 77 (277)

2. Le equazioni biquadratiche 78 (278)

3. Le equazioni trinomie 79 (279)

4. Le equazioni reciproche 80 (280)

5. Equazioni irrazionali 87 (287)

21 VOLUME DEI SOLIDI

1. Concetto di volume

Anche per le figure solide, come per le figure piane, si può parlare di equivalenza (o equiscomponibilità).

Limitandoci inizialmente a considerare figure che siano **prismi** (o **unioni finite di prismi** a due a due privi di punti interni in comune) si ha la seguente definizione:

D

Due prismi [1] *sono* **equivalenti** (o, più precisamente **equiscomponibili**) *se possono esser scomposti nello stesso numero di parti, in modo che ogni parte dell'una sia congruente ad una parte dell'altra e viceversa.*

In tal modo si definisce una relazione di equivalenza e vale la proprietà additiva (si confronti con il paragrafo 1 del cap. 23° del vol. I). Si è introdotti poi a dare la definizione di **estensione** *di una figura F* come classe d'equivalenza di *F* rispetto a tale relazione di equivalenza. In altre parole, **due figure hanno la stessa estensione se e solo se sono equivalenti** (ovvero *equiscomponibili*). Si verifica inoltre che due figure congruenti, cioè tali che esista un'isometria che porti l'una nell'altra, hanno la stessa estensione.

Per parlare di misura dell'estensione di una figura si fissa, in primo luogo, come unità di misura un cubo **c** di lato **u**, ove **u** è l'unità di misura delle lunghezze. Per semplicità si adotta il metro come unità di misura delle lunghezze e perciò il metro cubo come unità di misura dell'estensione.

Poiché si dimostra che: *dato un qualsiasi prisma, si può costruire un parallelepipedo rettangolo, avente per base un rettangolo equiscomponibile con la base del prisma e avente altezza congruente a* **u**, cioè si può costruire un parallelepipedo rettangolo equivalente al prisma, e di altezza **u**, per misurare l'estensione del prisma, si confronta tale parallelepipedo rettangolo con il cubo unitario **c** mediante il procedimento della misurazione decimale. Il numero reale che si ottiene si chiama **misura dell'estensione del prisma** o brevemente, **volume del prisma**.

Procedimenti analoghi si seguono per figure più generali.

2. Volume del parallelepipedo rettangolo

Il volume di un parallelepipedo rettangolo si determina con un procedimento simile a quello adoperato per l'area del rettangolo.

---

[1] O due unioni finite di prismi a due a due privi di punti interni in comune - dette **pluriprismi**.

TEOREMA 2.1 *(volume del parallelepipedo rettangolo)*

Il volume di un parallelepipedo rettangolo è il prodotto delle misure delle sue dimensioni (cioè di tre spigoli uscenti da un suo vertice).

DIMOSTRAZIONE Sia P un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c; sia C il cubo avente per lato l'unità di misura u delle lunghezze (Fig. 21.1).

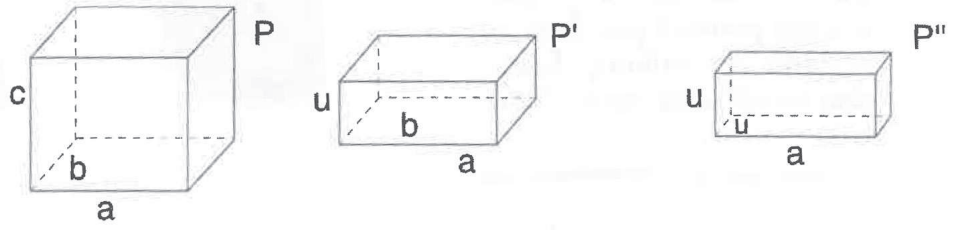


Fig. 21.1.

Siano P' e P'' due parallelepipedi di dimensioni a, b, u e a, u, u rispettivamente. Poiché si può dimostrare che: *parallelepipedi rettangoli aventi due dimensioni congruenti* stanno fra loro come la terza dimensione, possiamo scrivere le seguenti proporzioni:

(2.1) $$P : P' = c : u$$

(2.2) $$P' : P'' = b : u$$

(2.3) $$P'' : C = a : u$$

Indicate con α, β e le misure di a, b, c rispetto all'unità u, si ha

$$\alpha = a : u \quad , \quad \beta = b : u \quad , \quad = c : u$$

e quindi dalle proporzioni (2.1), (2.2), (2.3) si deduce facilmente

$$P = P' \quad , \quad P' = \beta P'' \quad , \quad P'' = \alpha C$$

da cui

(2.4) $$P = \alpha\beta\, C$$

La (2.4) comporta che la misura del parallelepipedo rettangolo P rispetto a C, cioè il volume di P è $\alpha\beta$ (cvd).

COROLLARIO 2.1

Il volume di un cubo è uguale al cubo della misura del suo spigolo.

DIMOSTRAZIONE Basta osservare che il cubo è un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni a, b, c congruenti fra loro: $a \equiv b \equiv c$ (cvd).

3. Volume del prisma

Si può dimostrare il seguente teorema, cui si è già accennato nel paragrafo 1:

TEOREMA 3.1

Un prisma qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo di base equivalente ed altezza congruente.

Il teorema 3.1 è conseguenza di un notevole risultato dovuto al matematico italiano Bonaventura Cavalieri (1589-1647) che va sotto il nome di:

PRINCIPIO DI CAVALIERI

Se due solidi si possono disporre rispetto ad un piano α in modo che le sezioni ottenute in essi da un qualunque piano β parallelo ad α siano equivalenti, allora i due solidi sono equivalenti. (Fig. 21.2).

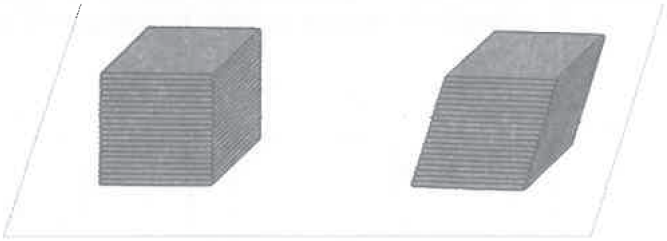


Fig. 21.2.

Per ottenere il volume di un prisma, osserviamo ora che un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c può esser riguardato ad esempio come un prisma retto avente per base il rettangolo di area $A = a \cdot b$ e per altezza $h = c$. In tal caso il suo volume $abc = A \cdot h$ può essere riguardato come prodotto dell'area di base per l'altezza:

$$V = A \cdot h \tag{3.1}$$

È facile verificare che la formula (3.1) continua a valere per il volume di un qualsiasi prisma la cui base abbia area uguale ad A e l'altezza misuri h. Si ha cioè il

TEOREMA 3.2 *(volume del prisma)*

Il volume di un prisma è il prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza.

4. Volume della piramide

Sussiste il seguente

TEOREMA 4.1

Due piramidi di basi equivalenti ed altezze congruenti sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE Siano date due piramidi di basi A e A' giacenti sul piano α e aventi la stessa altezza h (Fig. 21.3). Siano B e B' le aree delle sezioni ottenute con un qualsiasi piano β parallelo

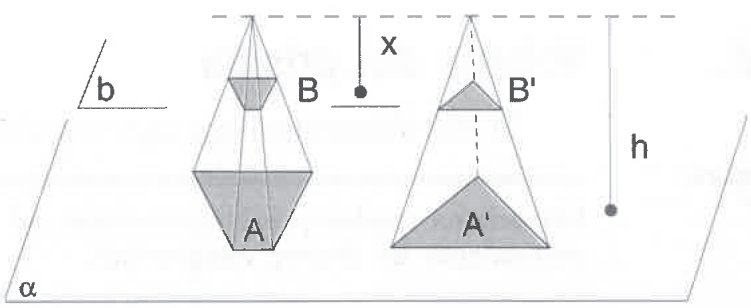


Fig. 21.3.

ad α la cui distanza dai vertici delle piramidi sia x. Dal teorema delle sezioni parallele di una piramide (ved. il paragr. 4 del cap. 19°) segue

$$A : B = h^2 : x^2 \quad \text{e} \quad A' : B' = h^2 : x^2$$

da cui

$$A : B = A' : B'$$

Essendo per ipotesi $A \equiv A'$ si avrà $B \equiv B'$ ed allora, per il principio di Cavalieri le piramidi sono equivalenti (cvd)

Il seguente teorema consentirà di calcolare il volume di una piramide.

TEOREMA 4.2

Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente base ed altezza congruenti.

DIMOSTRAZIONE Limitiamo la dimostrazione al caso di una piramide triangolare $OABC$. Tracciamo il piano β per il vertice O, parallelo alla base ABC (Fig. 21.4).
Conduciamo poi dai punti B e C le parallele allo spigolo OA che intersecheranno β nei punti D ed E. In tal modo otteniamo un prisma triangolare che ha la stessa base ABC e la stessa altezza della piramide data e che è decomponibile come unione della data piramide e della piramide quadrangolare di vertice O e base $BCED$.
Consideriamo il piano determinato dalle rette OB, OE, il quale evidentemente divide la piramide quadrangolare nelle due piramidi triangolari di vertice O e basi BED e BCE. Tali basi sono congruenti perché BE è diagonale di un parallelogrammo e quindi le due piramidi sono equivalenti.

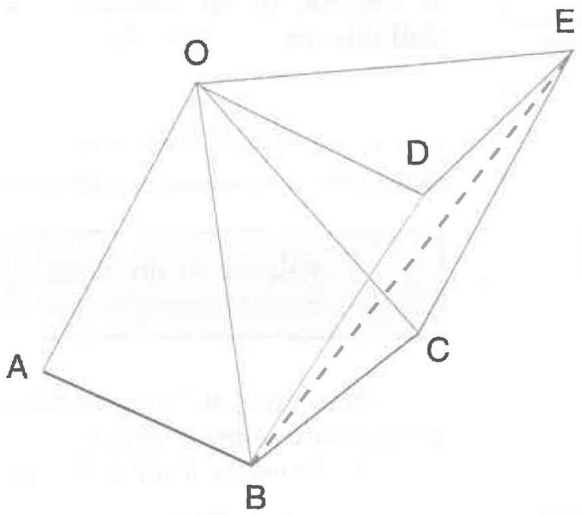


Fig. 21.4.

Se nel tetraedro $OBDE$ consideriamo come vertice B e come base il triangolo OED, esso è equivalente alla data piramide perché ha con essa altezze e basi rispettivamente congruenti.
Abbiamo così dimostrato che il prisma è decomponibile nell'unione di tre piramidi equivalenti tra loro e prive di punti interni in comune, da cui segue subito l'asserto (cvd).

COROLLARIO 4.1 *(volume di una piramide)*

Il volume V di una piramide si ottiene dividendo per 3 il prodotto dell'area di base A_b per la misura dell'altezza h.
In formule:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

5. Volume del cilindro e del cono

Nel cap. 15° abbiamo definito l'area del cerchio come (unico) elemento di separazione tra le classi A e B costituite dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio.

Un analogo procedimento si può seguire per definire il *volume di un cilindro*, a partire dalle classi A_c e B_c costituite dai volumi dei prismi inscritti e circoscritti al cilindro.

D

Il **volume di un cilindro** *è l'elemento di separazione tra la classe dei volumi dei prismi inscritti e la classe dei volumi dei prismi circoscritti al cilindro.*

In effetti si dimostra che le classi di cui alla definizione precedente sono contigue e perciò hanno un unico elemento di separazione

Si dimostra inoltre il seguente utile

TEOREMA 5.1 *(volume del cilindro)*

Il volume di un cilindro è il prodotto dell'area della base per la misura h dell'altezza. *In formule*:

$$V = \pi r^2 h$$

ove r è il raggio della base.

D

Il **volume di un cono** *è l'elemento di separazione tra la classe dei volumi delle piramidi inscritte e la classe dei volumi delle piramidi circoscritti al cono.*

In effetti, anche in questo caso, si dimostra che le classi di cui alla definizione precedente sono contigue.

Si dimostra inoltre il seguente utile

TEOREMA 5.2 *(volume del cono)*

Il volume di un cono è la terza parte del prodotto dell'area della base per la misura h dell'altezza. *In formule*:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ove r è il raggio della base.

6. Volume del tronco di piramide e del tronco di cono

Data una piramide, vogliamo determinare il volume del tronco ottenuto sezionando la piramide con un piano parallelo alla base (Fig. 21.5).

Sia h la distanza tra le due basi A e A' del tronco e x la distanza della base A' dal vertice V.

La misura V del tronco di piramide è evidentemente la differenza tra la misura della piramide data e quella della piramide ottenuta sezionando la prima:

$$(6.1) \qquad V = \frac{1}{3} A\,(h+x) - \frac{1}{3} A'x = \frac{1}{3}\,[Ah + (A - A')\,x]$$

Poiché le aree di sezioni parallele di una piramide sono proporzionali ai quadrati delle misure delle loro distanze dal vertice, si ha

$$A : A' = (h+x)^2 : x^2$$

ovvero, estraendo la radice quadrata

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}} = \frac{h+x}{x} = \frac{h}{x} + 1$$

da cui, risolvendo rispetto a x, si ha facilmente

$$x = \frac{h\sqrt{A'}}{\sqrt{A} - \sqrt{A'}}$$

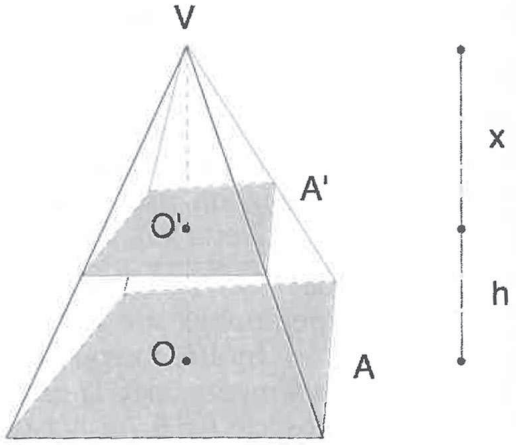


Fig. 21.5.

Sostituendo nella (6.1), si trova:

$$V = \frac{1}{3}\left[Ah + (A - A')\frac{h\sqrt{A'}}{\sqrt{A} - \sqrt{A'}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[Ah + \frac{(A - A')\,h\sqrt{A'}\,(\sqrt{A} + \sqrt{A'})}{A - A'}\right]$$

$$= \frac{1}{3} h\,[A + \sqrt{A'}\,(\sqrt{A} + \sqrt{A'})]$$

In definitiva

$$V = \frac{1}{3} h\,(B + \sqrt{BB'} + B')$$

Si può dimostrare poi che *il volume V del tronco di cono, i cui raggi delle basi misurano r e r', è dato da*

$$V = \frac{1}{3} h\ \ (r^2 + rr' + r'^2)$$

ove h è la distanza tra le basi.

7. Volume della sfera

Su un piano α, consideriamo, come in Fig. 21.6, metà della sfera di raggio r ed il solido che si ottiene togliendo da un cilindro la cui base abbia raggio r e la cui altezza sia pure r, tutti i punti interni al cono avente la stessa base e la stessa altezza.

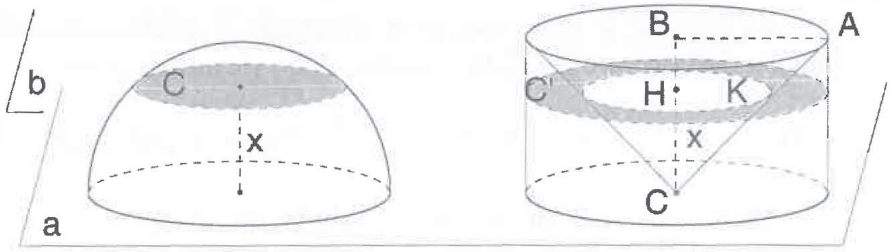


Fig. 21.6 - Tagliando con il piano β la semisfera e la scodella di Galilei, si ottengono un cerchio $\mathscr{C}$ ed una corona circolare $\mathscr{C}'$.

Tale solido si chiama «scodella di Galilei» (1)

Intersecando la semisfera e la scodella con un piano β parallelo ad α si ottengono rispettivamente un cerchio $\mathscr{C}$ ed una corona circolare $\mathscr{C}'$.

Detta x la distanza tra i piani α e β, la misura del raggio del cerchio $\mathscr{C}$ è data da $\sqrt{r^2 - x^2}$, in quanto il raggio è cateto di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è r e l'altro cateto vale x.

Inoltre i raggi della corona circolare hanno lunghezze r e x, come si verifica facilmente, per la similitudine fra il triangolo CHK ed il triangolo rettangolo isoscele CBA (in cui $CB \equiv BA \equiv r$).

Le aree di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono allora rispettivamente

$$A = \pi\,(r^2 - x^2) \quad , \quad A' = \pi r^2 - \pi x^2$$

e quindi coincidono.

Applicando il principio di Cavalieri, abbiamo che il volume della semisfera coincide con quello della scodella. Poiché quest'ultimo è la differenza dei volumi del cilindro e del cono che generano la scodella, e cioè

$$\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3,$$

è dimostrato il seguente

TEOREMA 7.1 *(volume della sfera)*

Detto V il volume della sfera di raggio r, si ha

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

8. Area della superficie sferica

Immaginiamo di suddividere la superficie della sfera mediante meridiani e paralleli in quadrilateri curvilinei come il quadrilatero $ABCD$ della Fig. 21.7.

Eseguendo una suddivisione sufficientemente fitta, possiamo riguardare tali quadrilateri come approssimativamente piani.

(1) Galileo Galilei (1564-1642), sommo scienziato italiano.

Congiungiamo il centro O della sfera con i vertici di tutti i quadrilateri ed osserviamo che in tal modo la sfera risulta decomposta in piramidi di altezza uguale al raggio, la cui somma delle basi coincide approssimativamente con la superficie sferica. Ne segue che il volume della sfera è uguale al volume di un'unica piramide, che ha base congruente alla superficie sferica e per altezza il raggio. Ricordando la formula per il volume di una piramide, il volume V della sfera è dato da

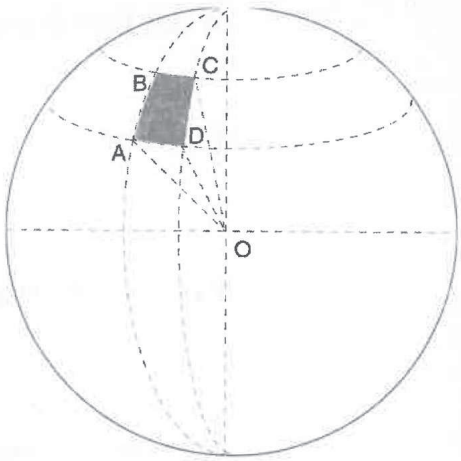


Fig. 21.7.

$$V = \frac{1}{3} rS \tag{8.1}$$

ove S è l'area della superficie sferica.

Sostituendo nella (8.1) l'espressione di V trovata nel teor. 7.1, si ha

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} rS$$

da cui:

$$S = 4\pi r^2$$

Abbiamo così ottenuto, anche se in maniera intuitiva e non attraverso una dimostrazione rigorosa che richiederebbe gli strumenti dell'Analisi Matematica, il seg. teorema.

TEOREMA 8.1 *(area della superficie sferica)*

Detta S l'area della superficie sferica di raggio r, si ha

$$S = 4\pi r^2$$

9. Misure relative alle figure sferiche

Sussistono le seguenti formule relative all'area di parti della superficie sferica e al volume di parti della sfera già definite nel capitolo precedente.

1. *L'area di una* **calotta** (o *di una* **zona**) **sferica** *di altezza h* e raggio r è

$$A = 2\pi rh$$

2. *L'area del* **fuso sferico** *di ampiezza in gradi pari a α e raggio r è:*

$$A = \pi r^2 \frac{\alpha}{90}$$

Se ρ è l'ampiezza in radianti dell'angolo di α gradi, cioè $\rho = \frac{\pi\alpha}{180}$, si ha:

$$A = 2r^2\rho$$

Se del fuso è nota la misura a dell'arco equatoriale, dalla proporzione

$$A : 4\pi r^2 = a : 2\pi r$$

si deduce

$$A = \frac{4\pi r^2 a}{2\pi r} = 2ra$$

3. *Il volume del* **segmento sferico ad una base** di altezza h e raggio r è dato da:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

4. *Il volume del* **segmento sferico a due basi** di altezza h e raggi delle basi r_1 e r_2 è dato da

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\pi\,(r_1^2 + r_2^2)\,h\,.$$

N. Fusco • C. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

EdiSES UNIVERSITÀ
www.edisesuniversita.it

€ 18,00

ISBN 978-88-3319-064-8